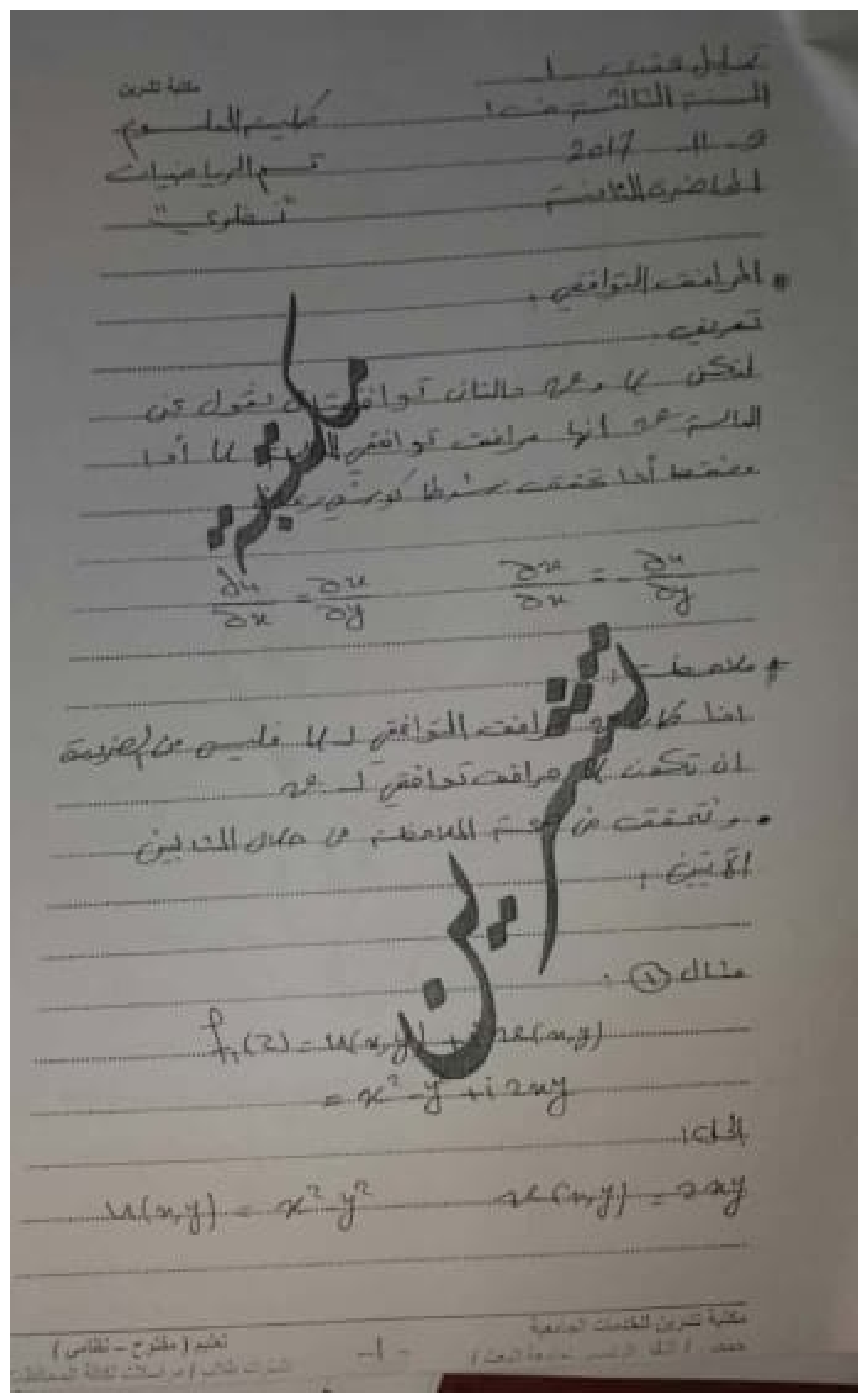


تحليل عقدي 1
السنة الثالثة رياضيات
ف 2 لعام 2017
المحاضرة الثامنة

كلية العلوم
قسم الرياضيات
نظري

* المرافقة التوافقي:

تعريف:

لتكن u معرفة في دالتان توافقيتان نقول عن الدالة v أنها مرافقة توافقي لـ u إذا وفقط إذا تحققت شرطا كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

* ملاحظة:

إذا كانت v مرافقة التوافقي لـ u فليس من الضروري أن تكون u مرافقة توافقي لـ v

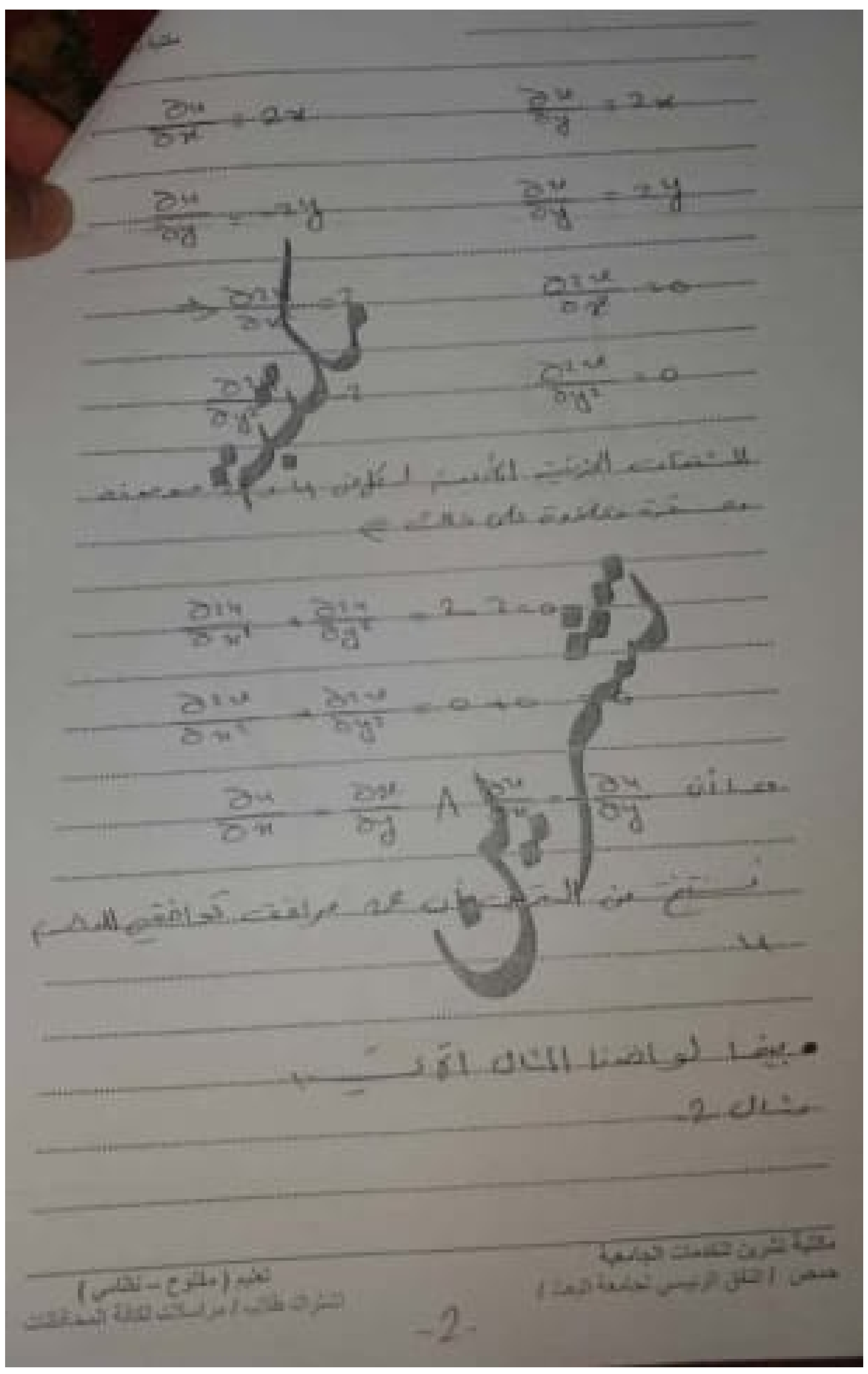
• نتحقق من صحة الملاحظة من خلال المثالين الآتيين:

مثال ①:

$$f_1(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$
$$= x^2 - y^2 + i\,2xy$$

الحل:

$$v(x,y) = 2xy \qquad u(x,y) = x^2 - y^2$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

[illegible]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

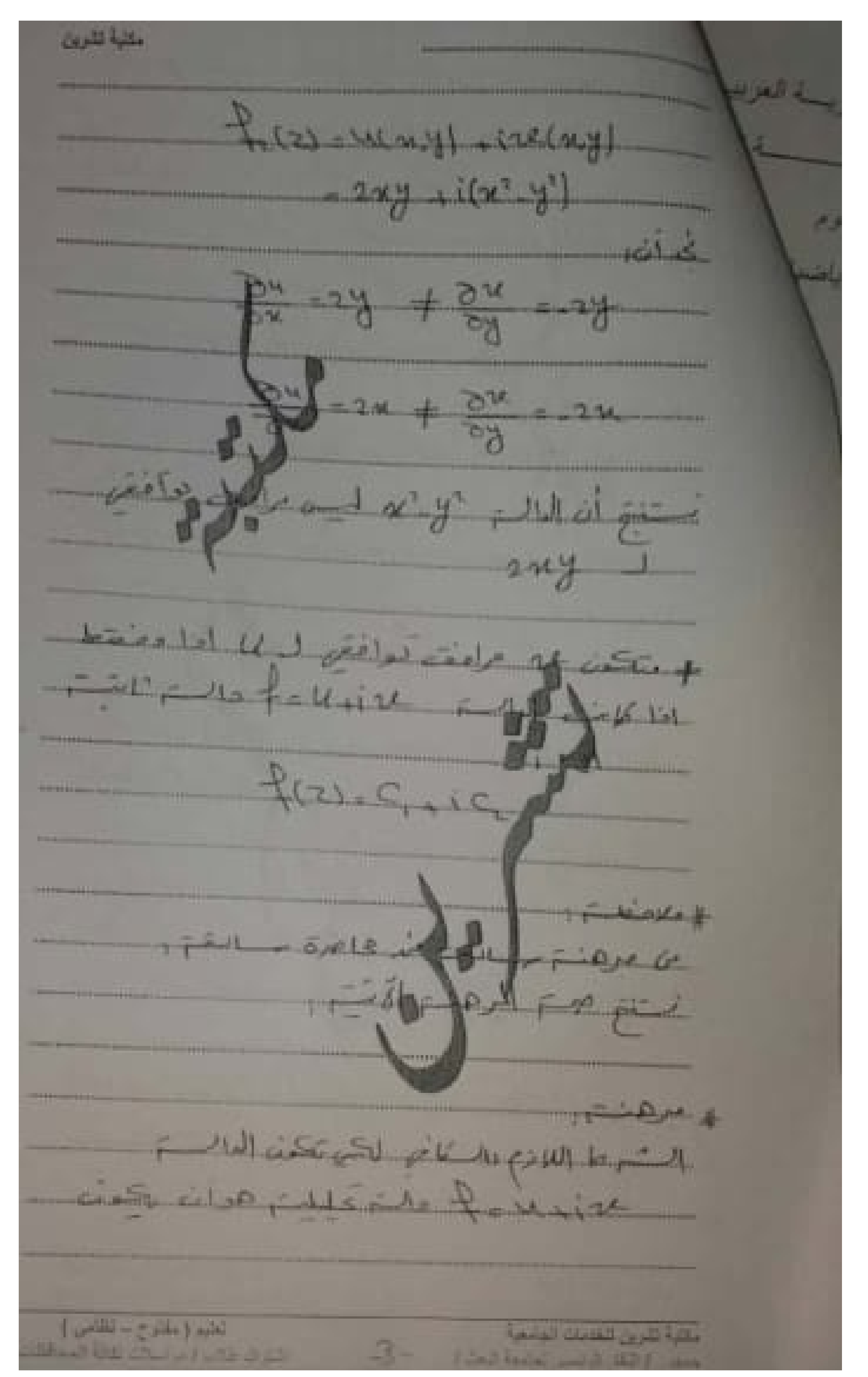
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

[illegible]

• بعض [illegible] المثال الآتي

مثال 2



$f_1(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$= 2xy + i(x^2 - y^2)$

نلاحظ

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial x} = -2x$

نستنتج أن الدالة $x^2 - y^2$ ليست مرافق توافقي

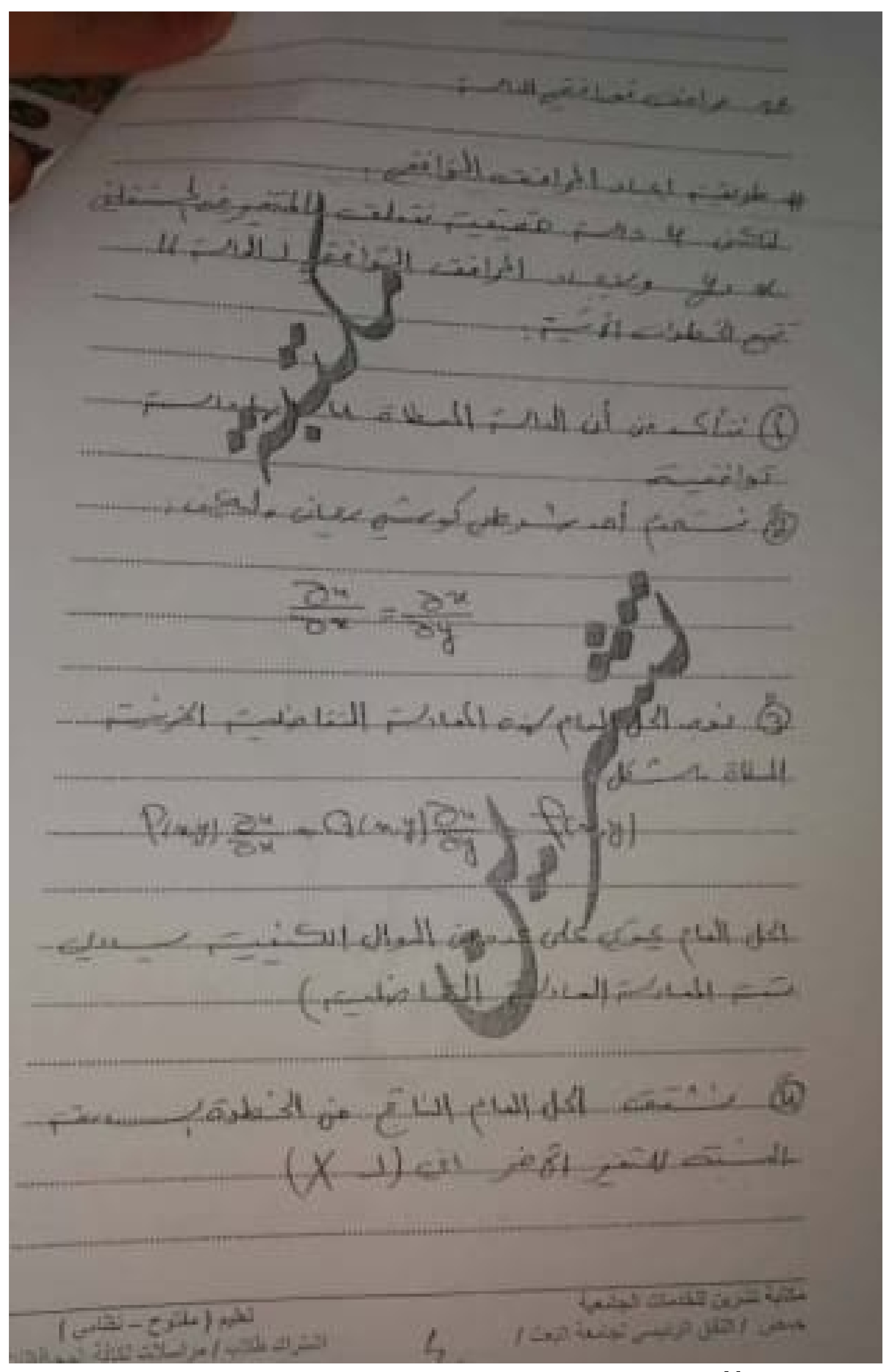
لـ $2xy$

* ملاحظة: إذا كانت v مرافقة توافقية لـ u وكانت u أيضاً مرافقة
إذا كانت ... فإن $f = u + iv$ دالة ثابتة

$f(z) = c_1 + ic_2$

* ملاحظة:
من مبرهنة ... عامرة ... القيم،
نستنتج ... المبرهنة الآتية:

* مبرهنة:
الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة
$f = u + iv$ دالة تحليلية هو أن تكون



ع- مرافقة تطابقي المعادلة

* طريقة لحل المعادلات المرافقة التفاضلية:
لاكن هي دالة حقيقية تتعلق بالمتغير المستقل
هي دالة ويمكن حل المعادلة التفاضلية الخاصة بها
تتبع الخطوات الآتية:

① نتأكد من أن المعادلة المعطاة هي معادلة تفاضلية
② نستخدم أحد شروط كوشي ريمان

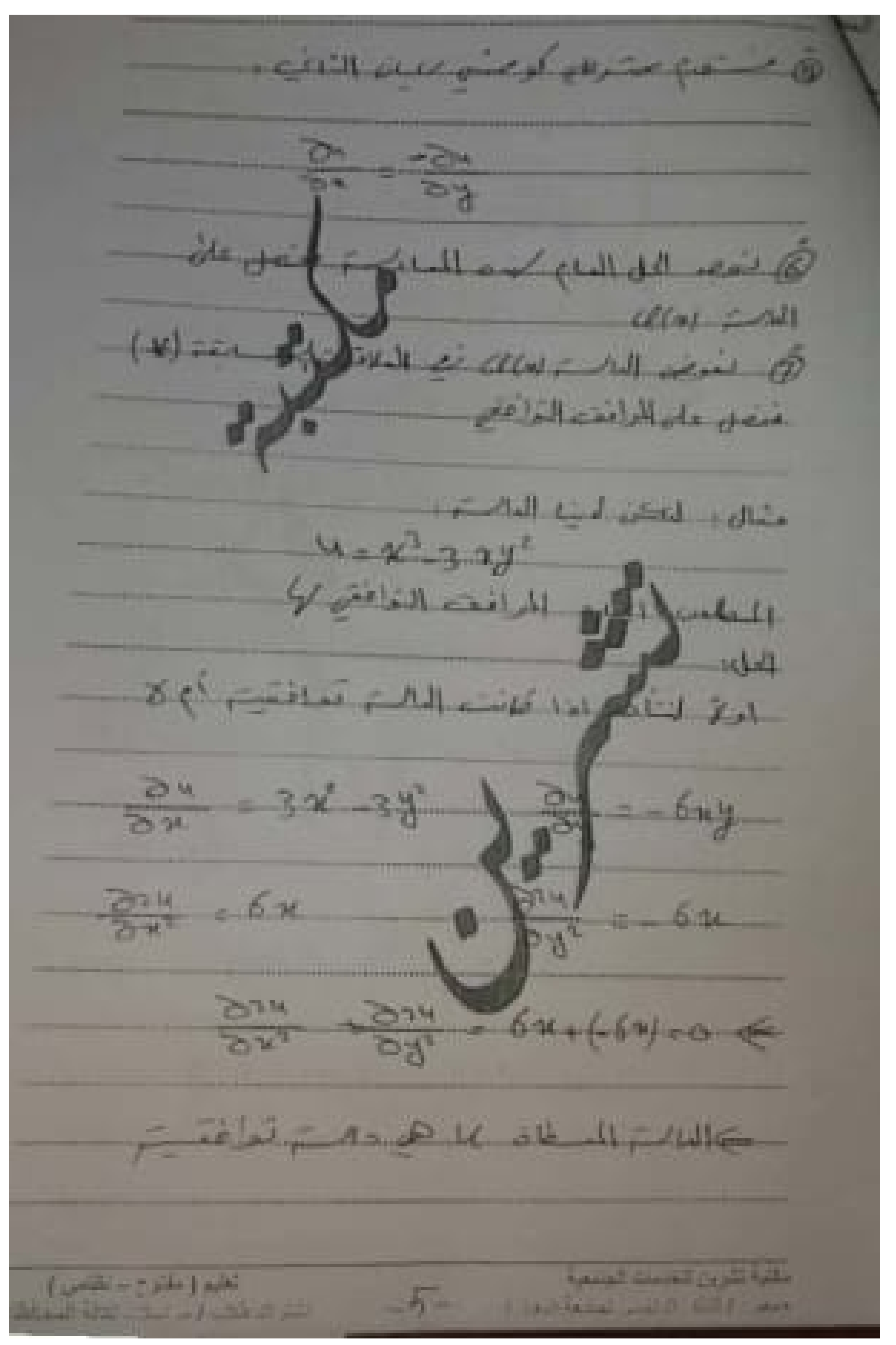
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

③ نوجد الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة بالشكل

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y)$$

الحل العام يحتوي على الدوال الكثيرة تسمى المعادلات العادية (التفاضلية)

④ نشتق الحل العام الناتج من الخطوة بالنسبة للمتغير الآخر (لـ X)



4) نستخدم شرطي كوشي ريمان الثاني:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

5) نعوض الحل العام من المعادلة [illegible] لنحصل على الثابت (c)

6) نعوض الثابت (c) في المعادلة [illegible] فنحصل على المرافقة التوافقية

مثال: لتكن لدينا الدالة:

$$u = x^3 - 3xy^2$$

المطلوب: أوجد المرافقة التوافقية v

الحل:

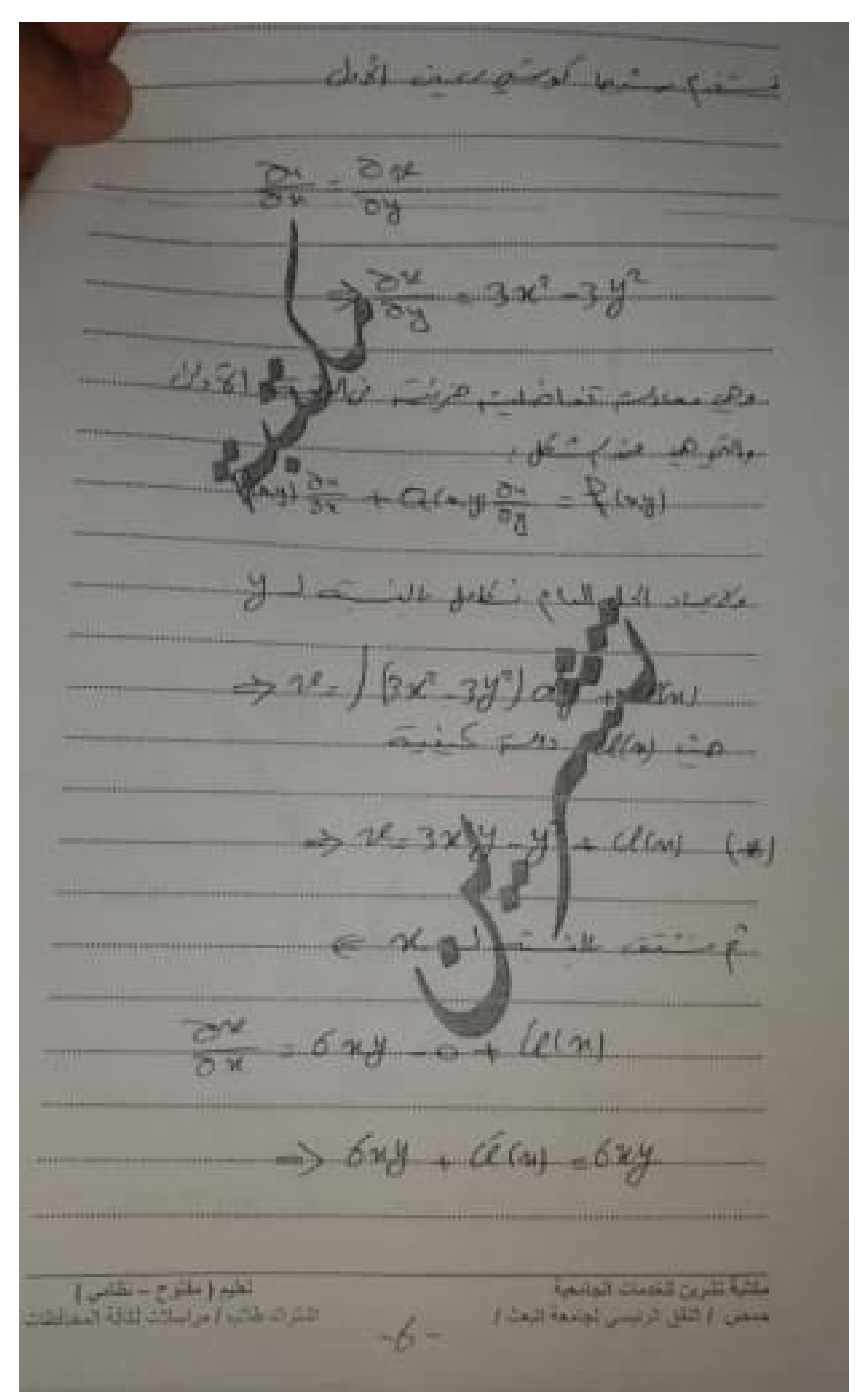
أولاً لنتأكد إذا كانت الدالة توافقية أم لا

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\Leftarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + (-6x) = 0$$

∴ الدالة المعطاة u هي دالة توافقية



نستنتج منها كوشي ريمان الأول

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى

وهي من الشكل:

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y)$$

لإيجاد الحل العام نكامل بالنسبة لـ y

$$\Rightarrow v = \int (3x^2 - 3y^2)\,dy + c(x)$$

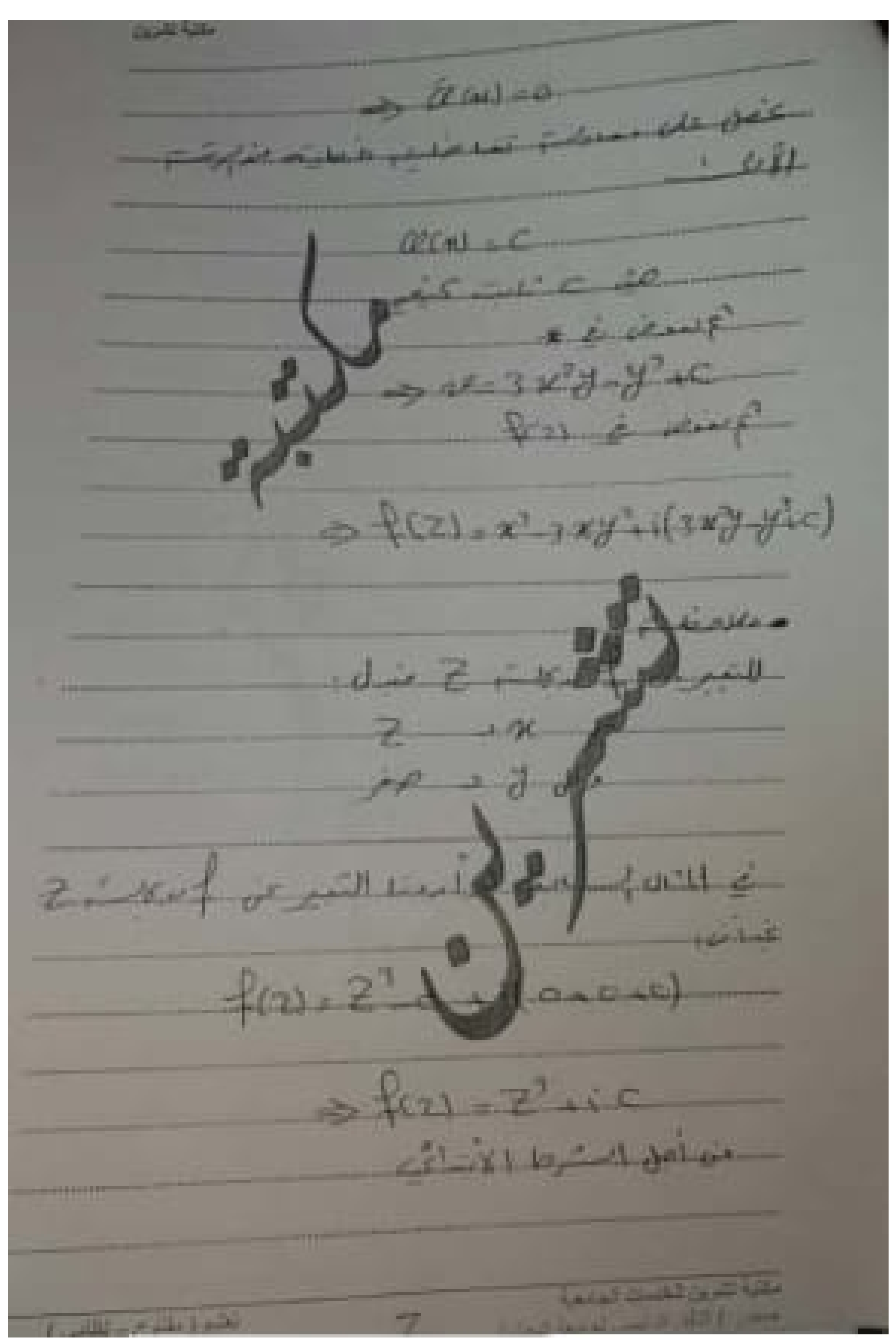
حيث $c(x)$ دالة كيفية

$$\Rightarrow v = 3x^2y - y^3 + c(x) \quad (*)$$

نشتق بالنسبة لـ x ⇐ v

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 0 + c'(x)$$

$$\Rightarrow 6xy + c'(x) = 6xy$$



$\Rightarrow \phi(x) = c$

[illegible]

$\phi(x) = c$

[illegible]

$\Rightarrow x^3 - 3x^2y - y^3 + c$

[illegible]

$\Rightarrow f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + c)$

[illegible] z [illegible]

$z \leftarrow x$

$0 \leftarrow y$

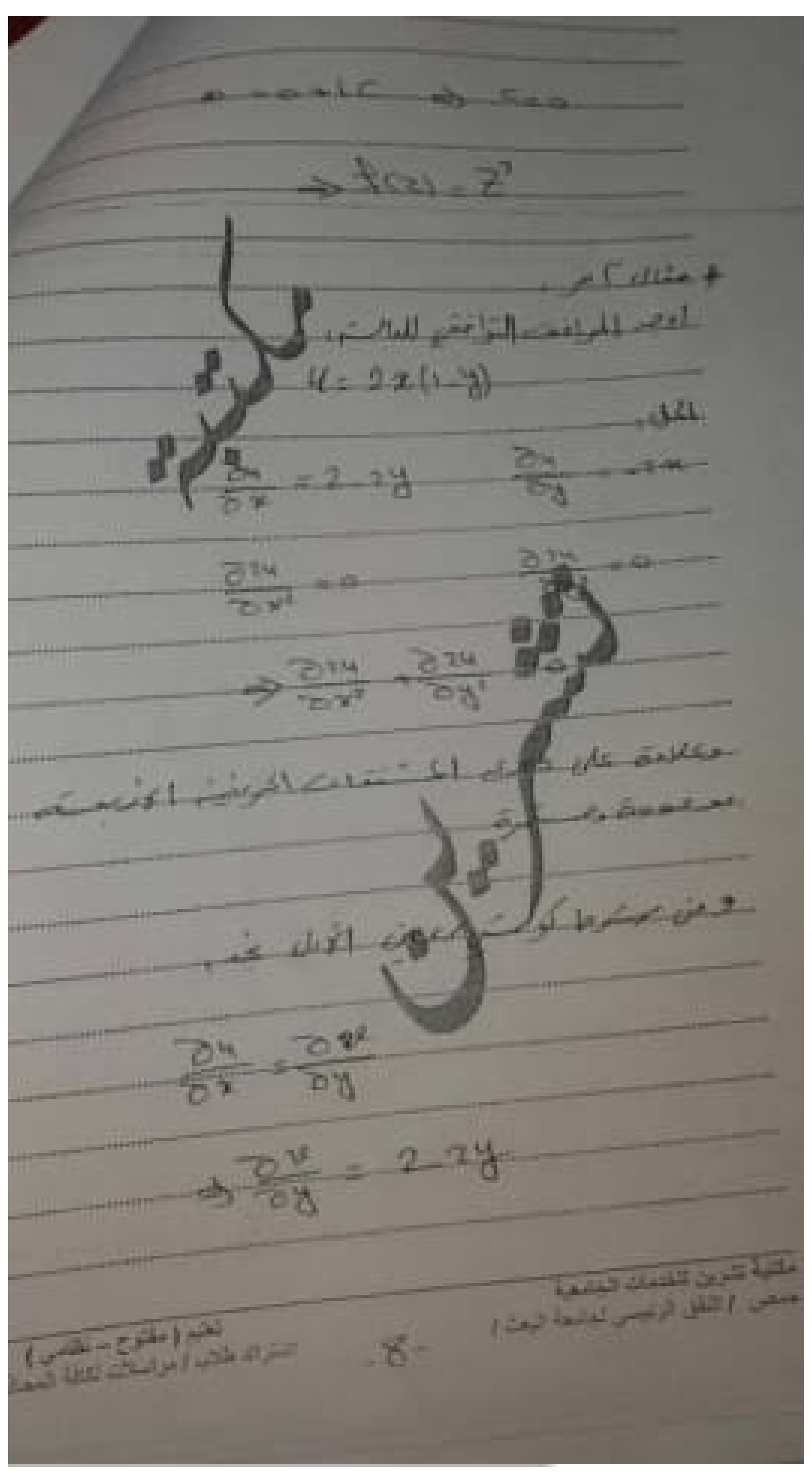
في الحالة [illegible] التعبير عن [illegible] z

[illegible]

$f(z) = z^3$ [illegible]

$\Rightarrow f(z) = z^3 + ic$

[illegible]



$\Rightarrow f(z) = \bar{z}$

مثال ٣ ص:

أوجد المرافق التوافقي للدالة:

$u = 2x(1-y)$

الحل:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2-2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

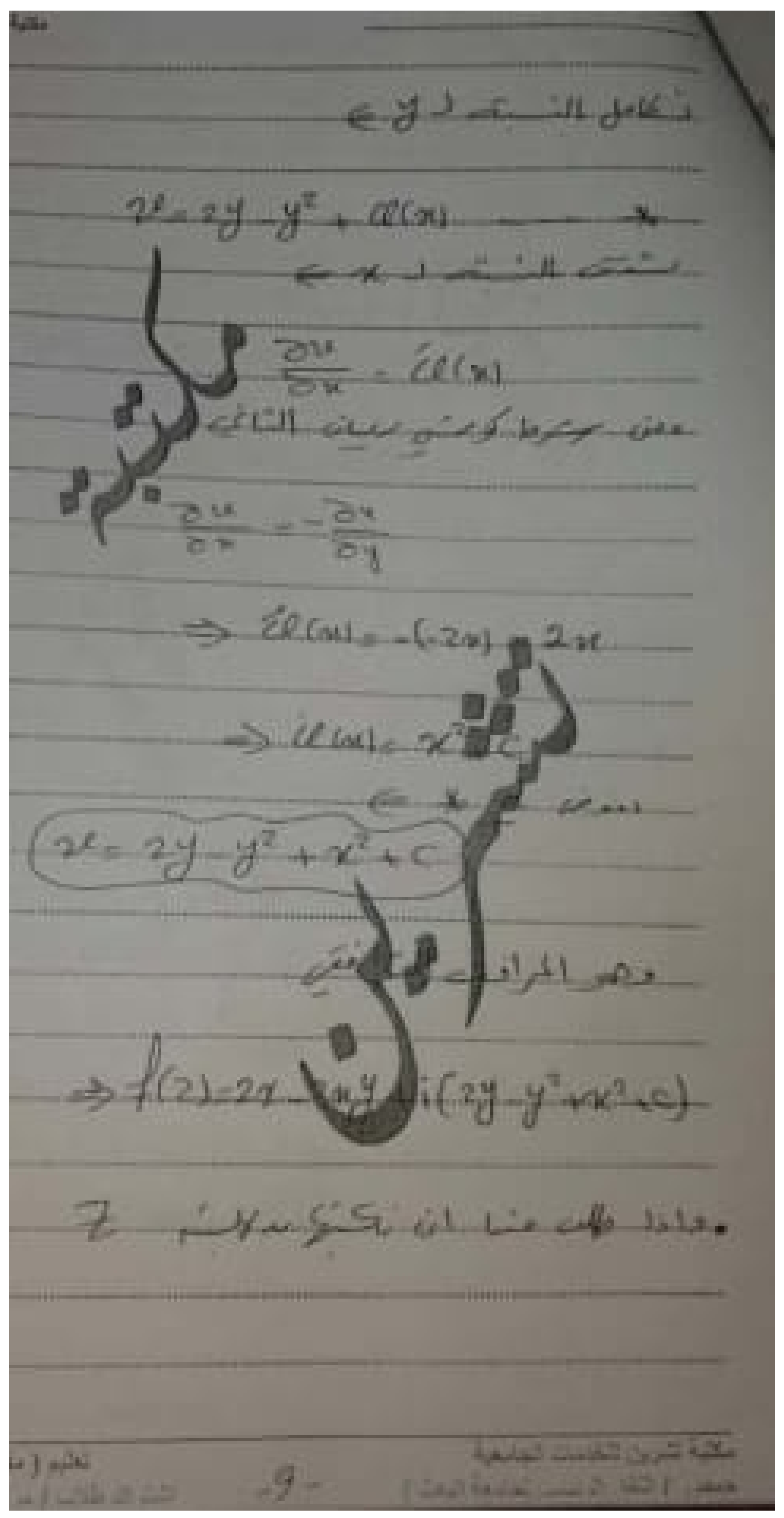
محققة على ... المشتقات الجزئية الأولى ...

[illegible]

ومن شرط كوشي ريمان الأول نجد:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2-2y$



تكامل النسبة لـ y ⇐

$u = 2y - y^2 + \ell(x)$ —— *

نشتق بالنسبة لـ x ⇐

$\frac{\partial u}{\partial x} = \ell'(x)$

من شرط كوشي ريمان الثاني ⇐

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

$\Rightarrow \ell'(x) = -(-2x) = 2x$

$\Rightarrow \ell(x) = x^2 + c$

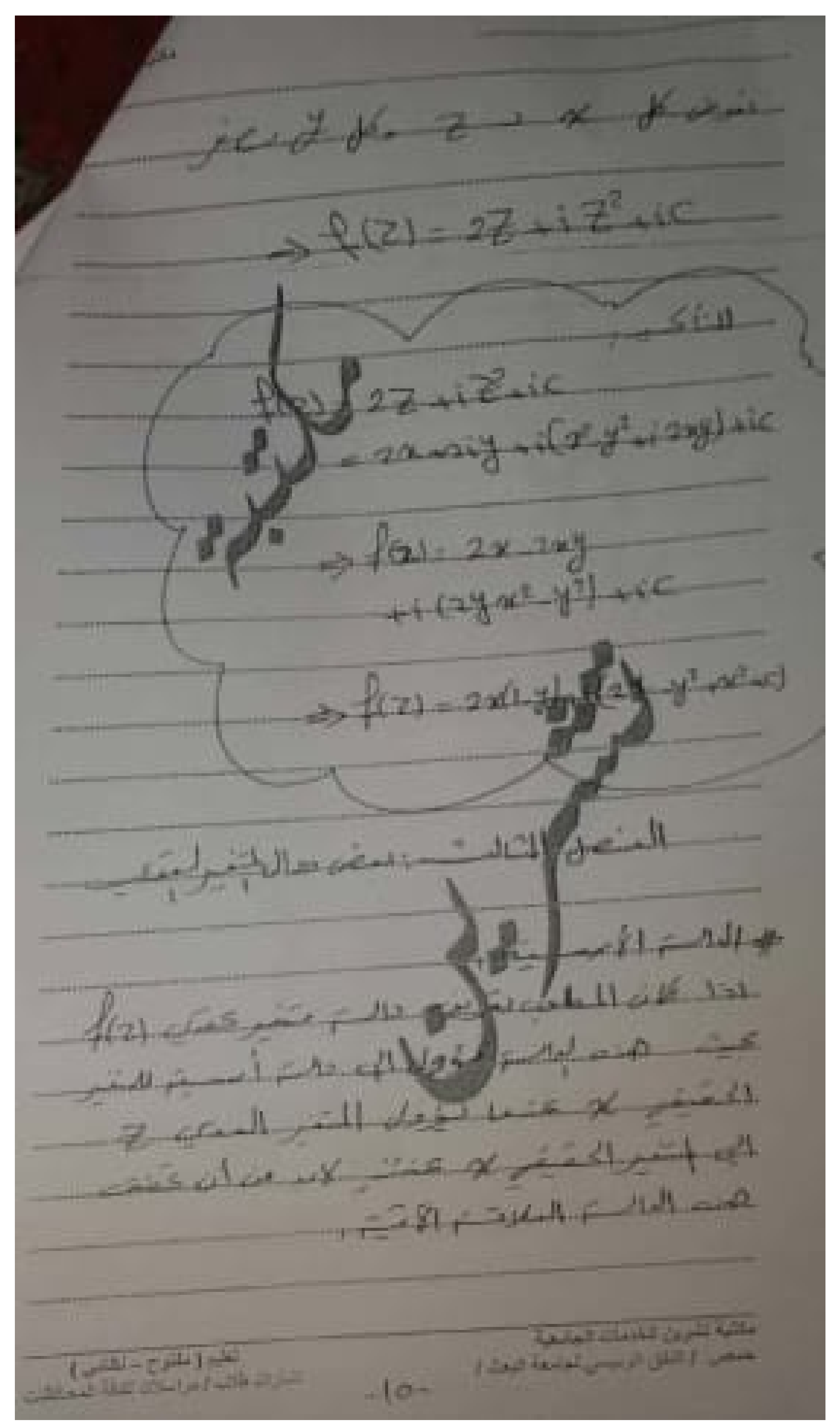
ومنه ⇐ *

$u = 2y - y^2 + x^2 + c$

نعوض المرافق

$\Rightarrow f(z) = 2x - 2xy + i(2y - y^2 + x^2 + c)$

ماذا طلب هنا أن نكتب بدلالة z


نعوض x بـ z و y بصفر

$\Rightarrow f(z) = 2z + iz^2 + ic$

للتأكد

$f(z) = 2z + iz^2 + ic$

$= 2x + 2iy + i(x^2 - y^2 + 2ixy) + ic$

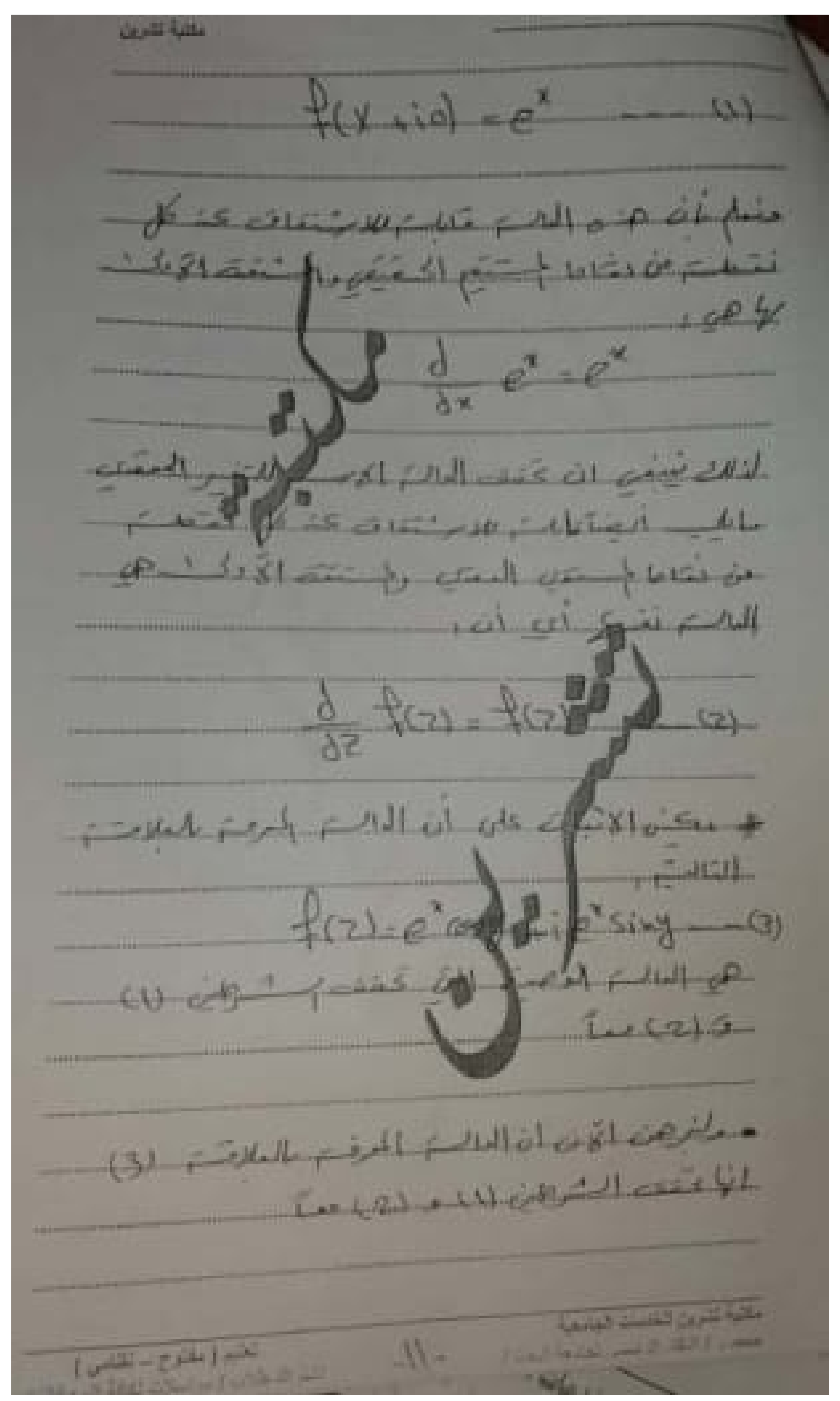
$\Rightarrow f(z) = 2x - 2xy$
$+ i(2y + x^2 - y^2) + ic$

$\Rightarrow f(z) = 2x - 2xy + i(2y - y^2 + x^2 + c)$

الفصل الثالث: التكاملات الخطية

الدالة الأصلية:

إذا كانت الدالة f(z) دالة متغير عقدي حيث تتحول إلى دالة أصلية للمتغير x عند تحويل المتغير العقدي z إلى المتغير x حيث لابد من أن تكون الدالة المعرفة الآتية:



$$f(x + i0) = e^{x} \quad ---- (1)$$

مفهوم ذلك هو أن الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستقيم الحقيقي ومشتقتها هي:

$$\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$$

لذلك ينبغي أن تكون الدالة المرتبة للتغير المعقد قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوى المعقد ومشتقتها هي الدالة نفسها أي أن:

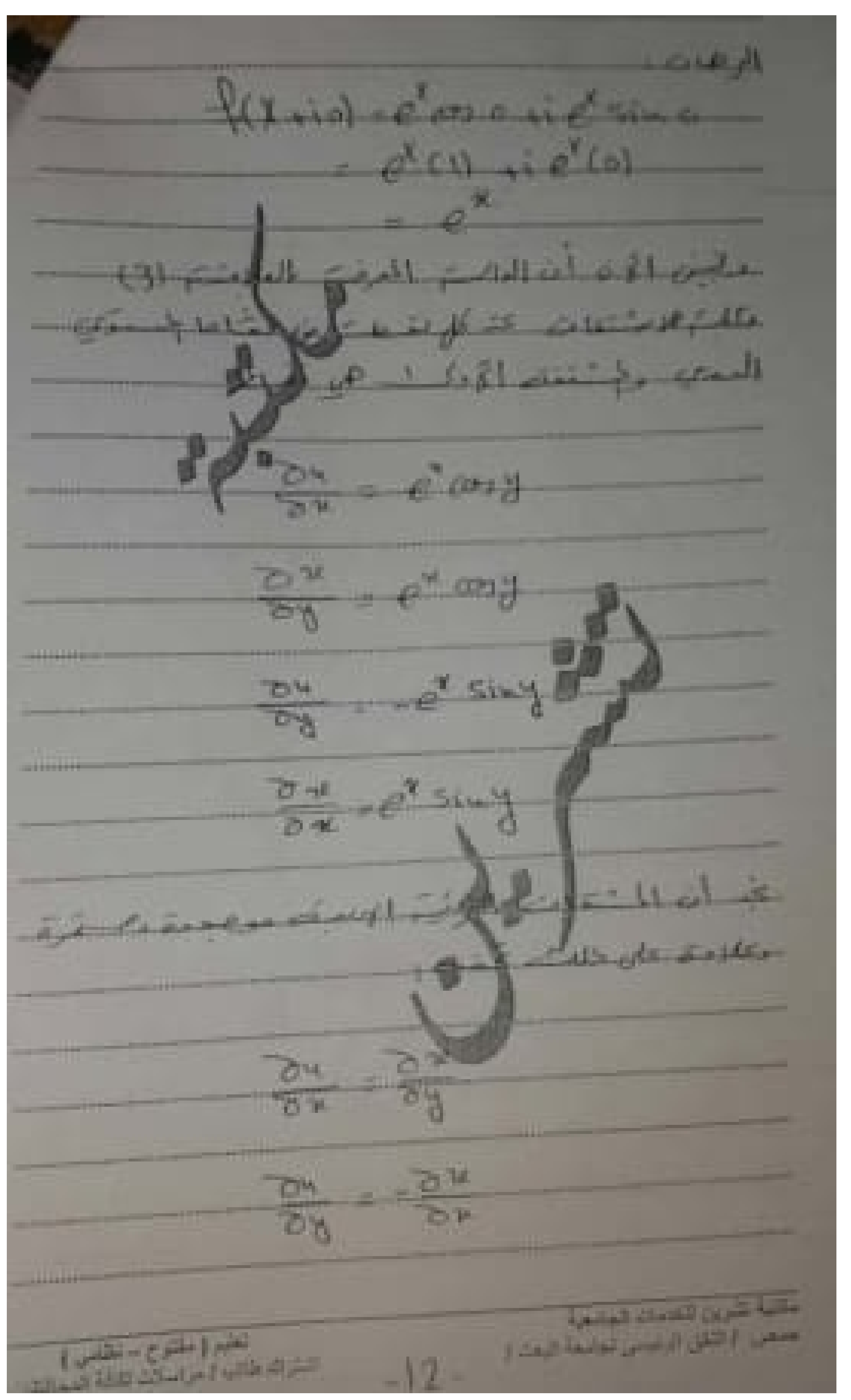
$$\frac{d}{dz} f(z) = f(z) \quad ---- (2)$$

* يمكن الإثبات على أن الدالة المرتبطة بالعلاقة التالية:

$$f(z) = e^{x} \cos y + i e^{x} \sin y \quad ---- (3)$$

هي الدالة الوحيدة التي تحقق الشرطين (1) و(2) معاً.

• ملاحظة الآن أن الدالة المرتبطة بالعلاقة (3) إنما تحقق الشرطين (1) و(2) معاً.



البرهان

$$f(x+i0) = e^x \cos 0 + i e^x \sin 0$$

$$= e^x(1) + i e^x(0)$$

$$= e^x$$

[illegible] (3) [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

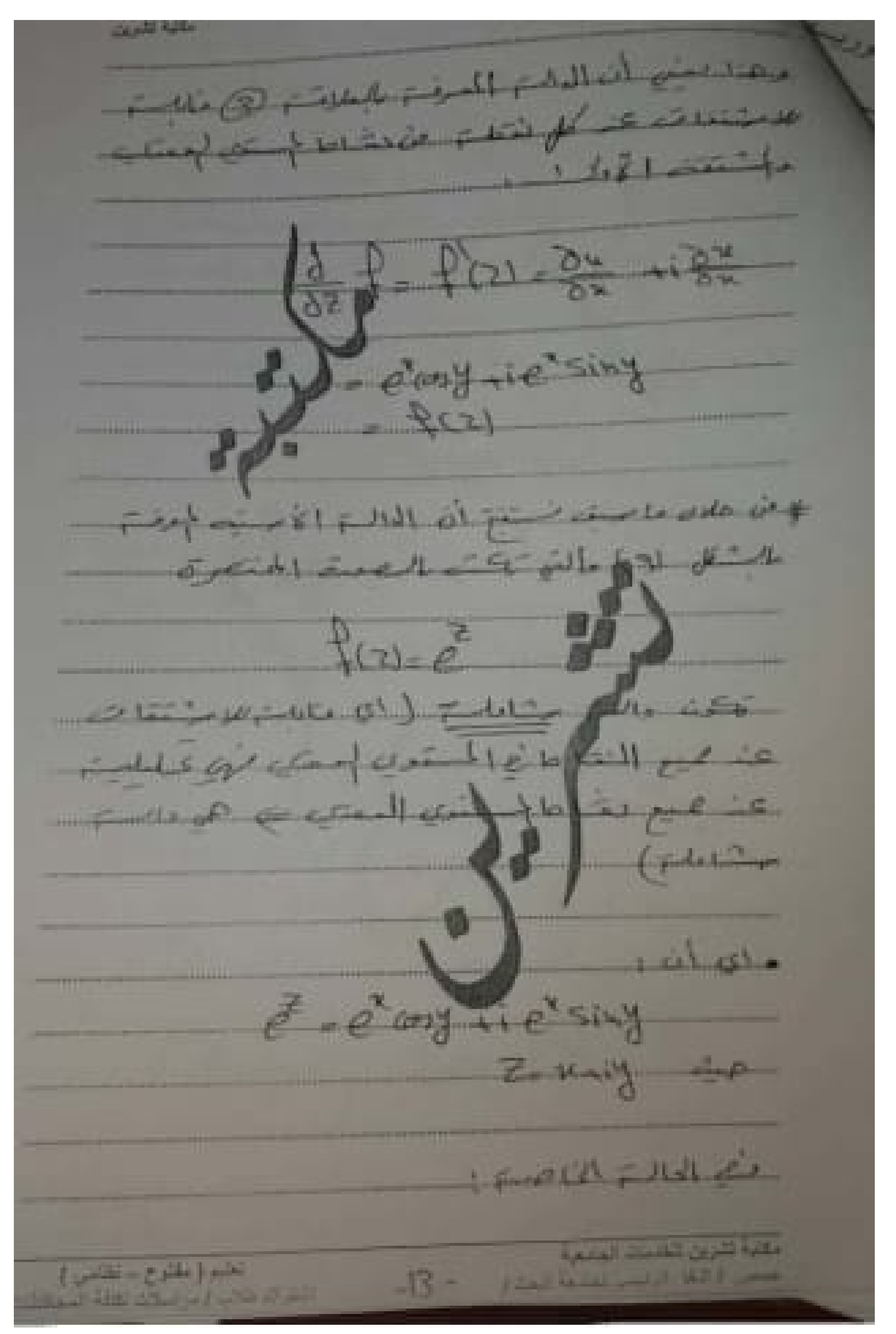
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

[illegible] تحقق [illegible]

[illegible] على ذلك

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$



وهذا يعني أن الدالة المعرفة بالعلاقة ② تحليلية لها مشتقات عند كل نقطة من نقاط المستوى المركب والمشتقة الأولى :

$$\frac{d}{dz}f = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x\cos y + i e^x \sin y$$

$$= f(z)$$

* من هذا ما سبق نستنتج أن الدالة الأسية المعرفة بالشكل السابق والتي هي الصيغة المختصرة

$$f(z) = e^z$$

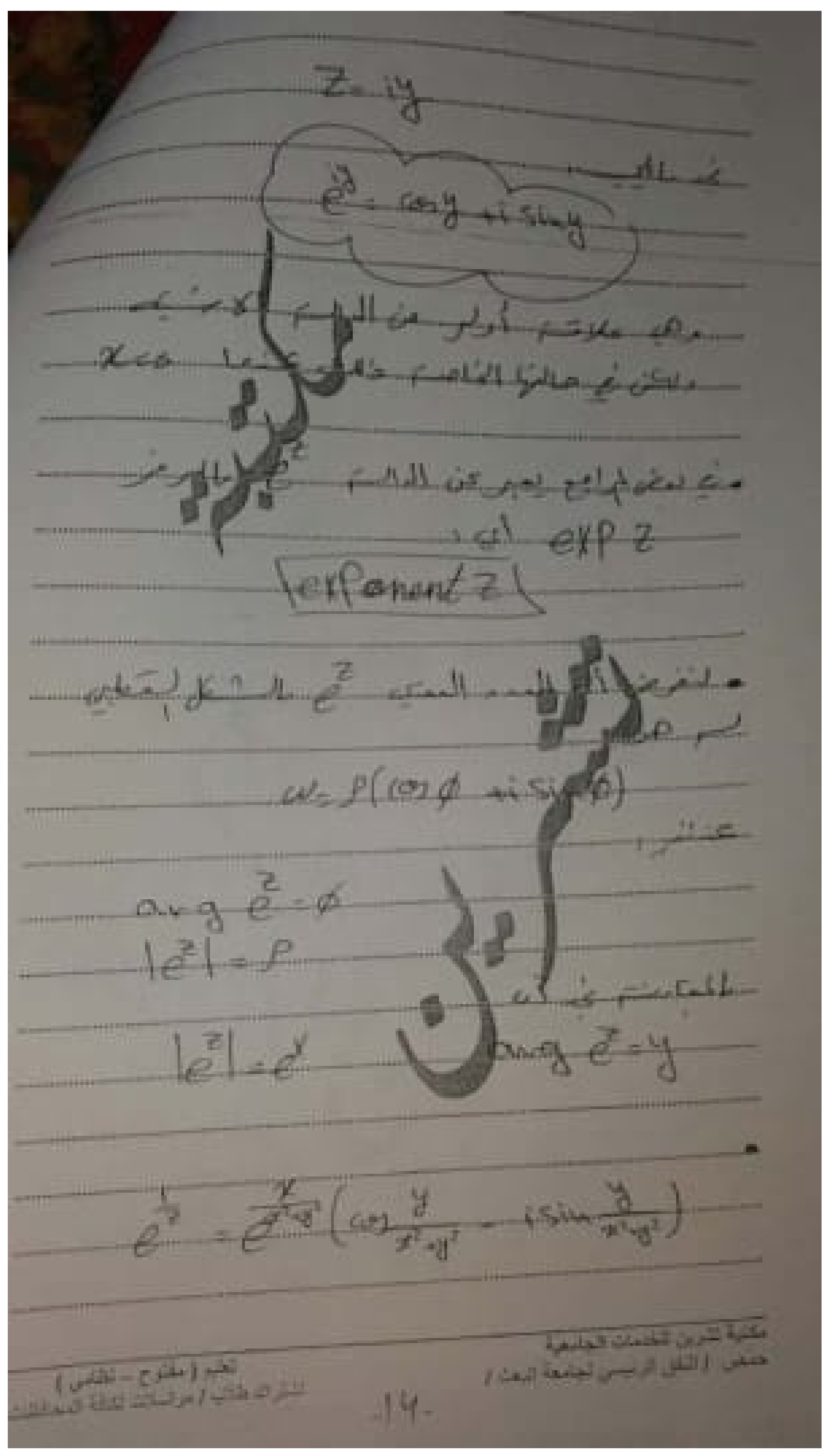
تكون دالة تحليلية (أي دالة لها مشتقات عند جميع النقاط في المستوى المركب أو تحليلية عند جميع نقاط المستوى المركب ⇐ هي دالة مستمرة)

أي أن :

$$e^z = e^x\cos y + i e^x \sin y$$

حيث $z = x+iy$

في الحالة الخاصة :



$z = iy$

في الحالة

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

وهي علاقة أويلر من الدرجة الأولى

ولكن في حالتها الخاصة عندما $x = 0$

في بعض المراجع يعبر عن الدالة e^z بالرمز

أي $\exp z$

exponent z

لنفرض أن الصيغة القطبية للعدد المركب e^z هي الشكل القطبي

$$w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

عندئذ

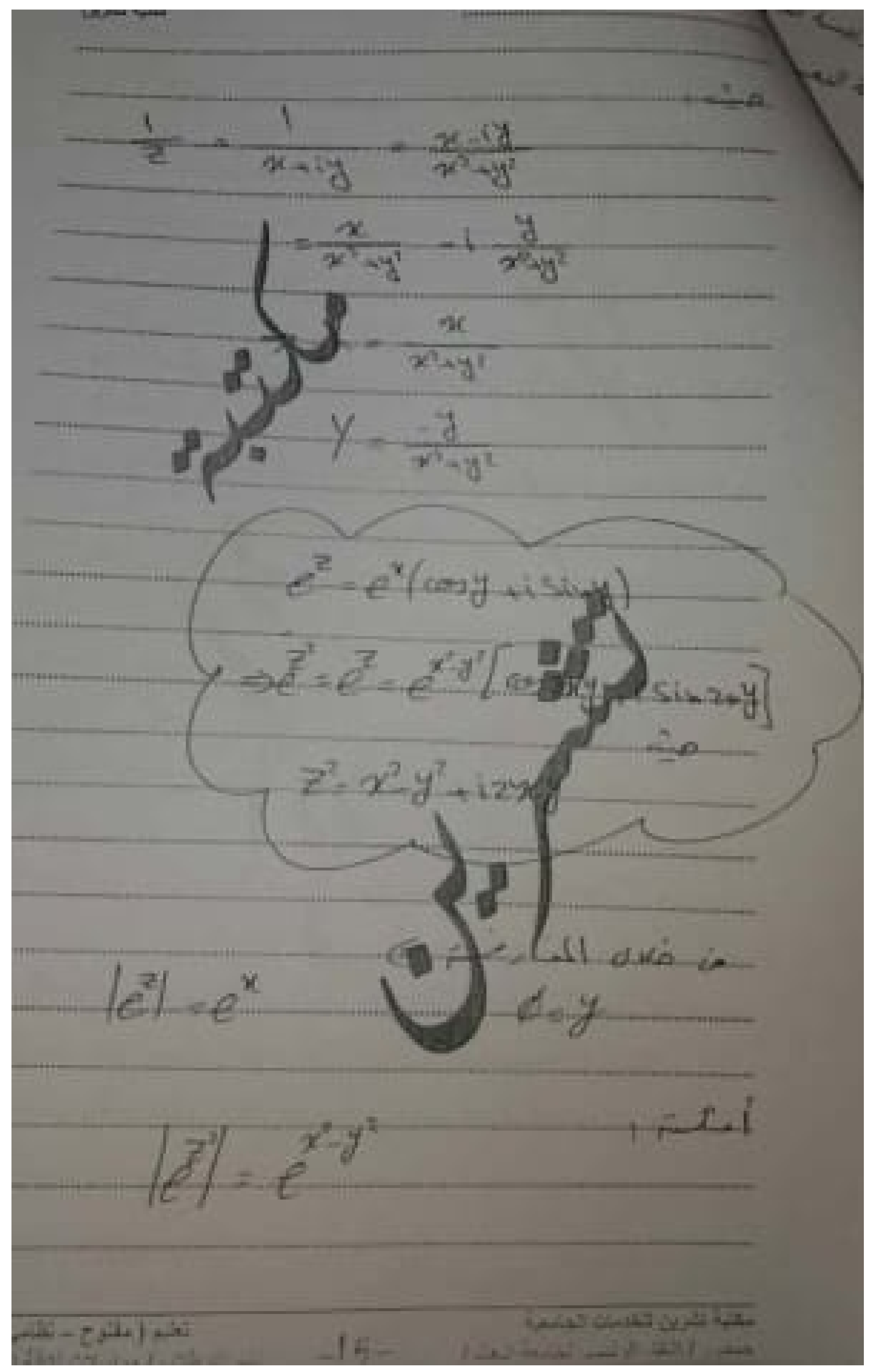
$$\arg e^z = \phi$$

$$|e^z| = \rho$$

وبالمقارنة نجد

$$|e^z| = e^x \qquad \arg e^z = y$$

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos \frac{y}{x^2+y^2} - i \sin \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$



حيث

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\Rightarrow e^{z^2} = e^{x^2-y^2}[\cos 2xy + i\sin 2xy]$$

حيث

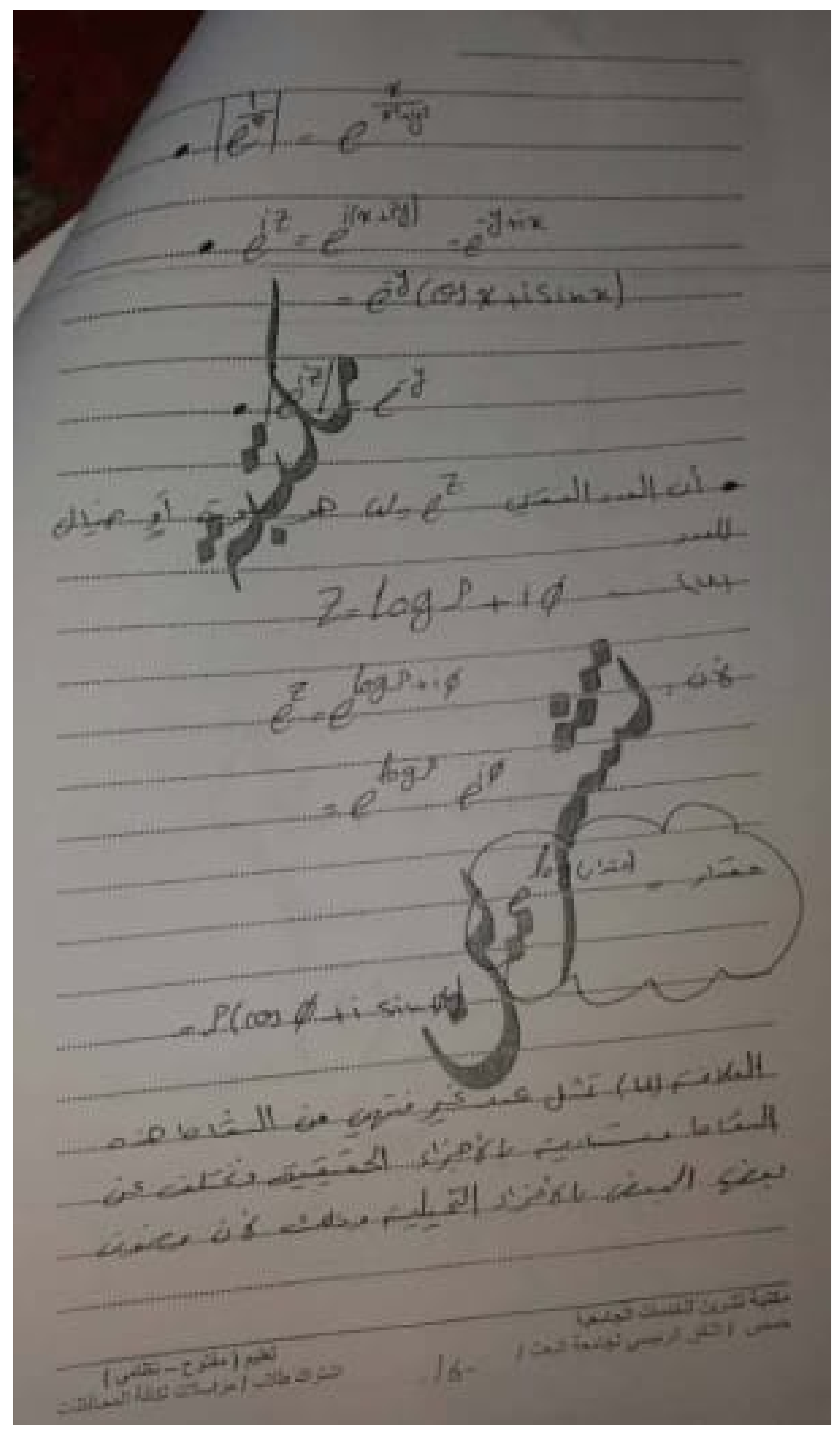
$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

من خلال الملاحظة

$$|e^z| = e^x \qquad \theta = y$$

أما الآن:

$$|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2}$$



- $|e^{\frac{1}{z}}| = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$

- $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$

$= e^{-y}(\cos x + i\sin x)$

- $|e^{iz}| = e^{-y}$

- أن العدد المركب e^z يمثل هو ... أو ... للعدد

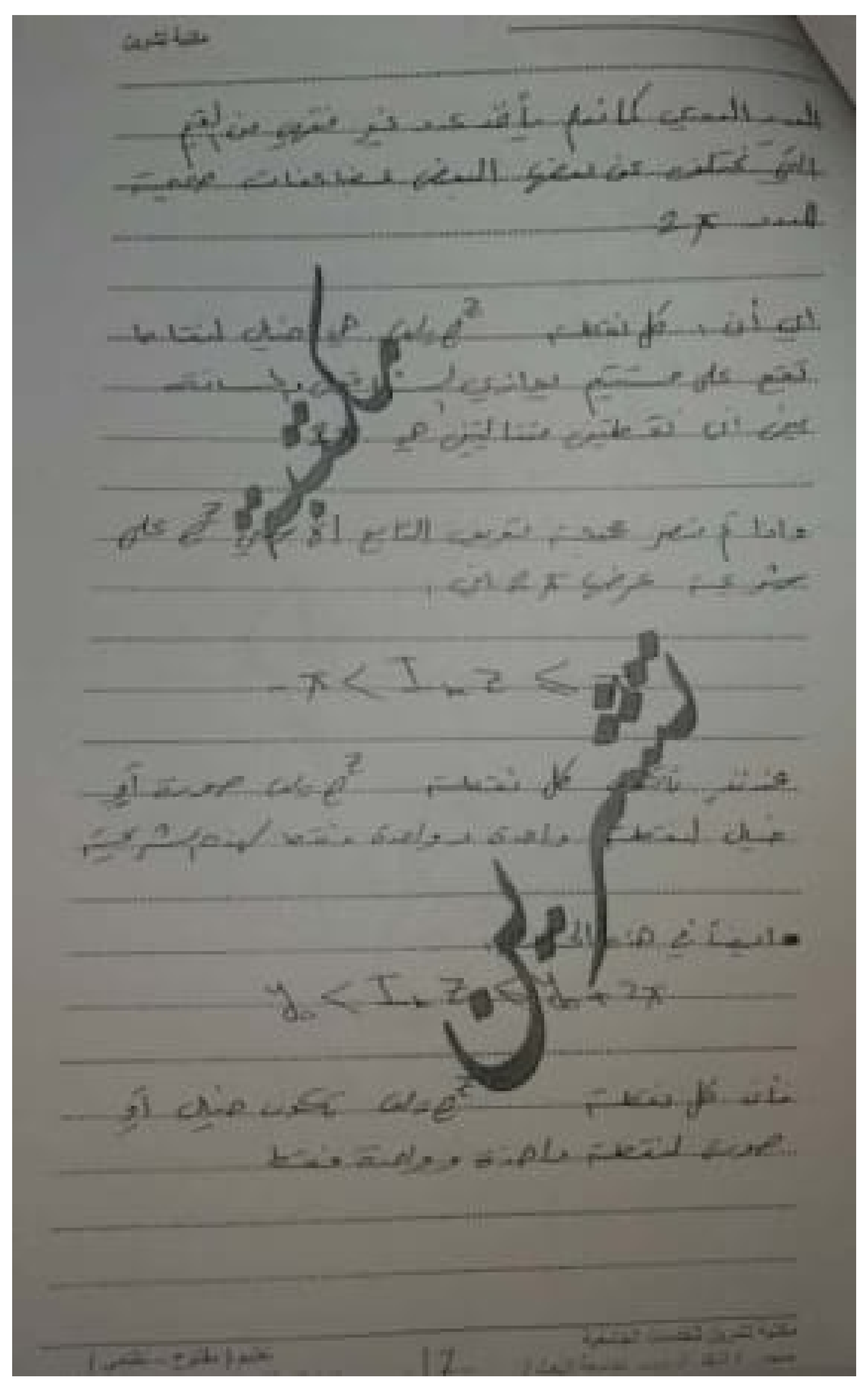
حيث $z = \log \rho + i\phi$

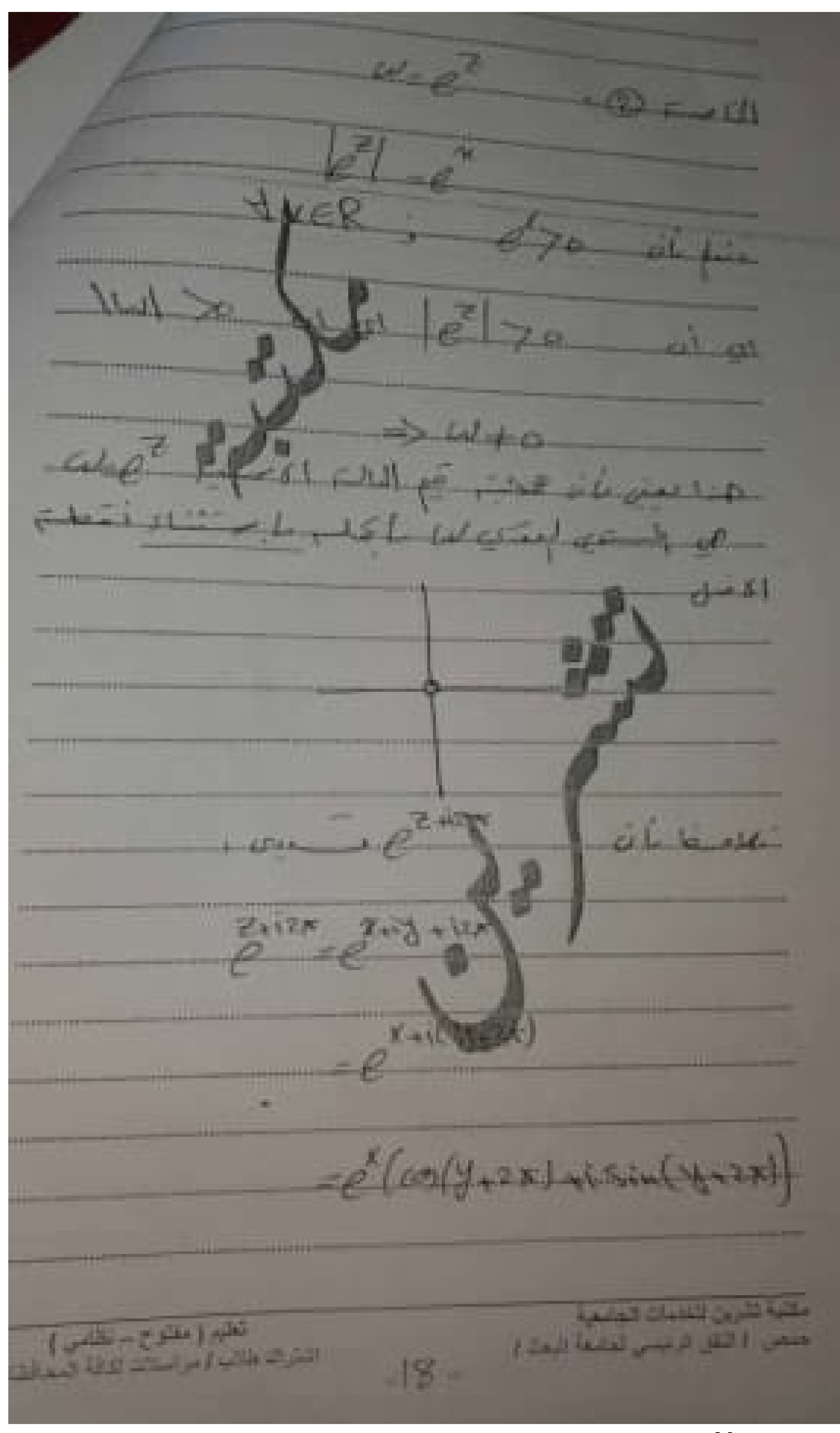
نجد $e^z = e^{\log \rho + i\phi}$

$= e^{\log \rho}\, e^{i\phi}$

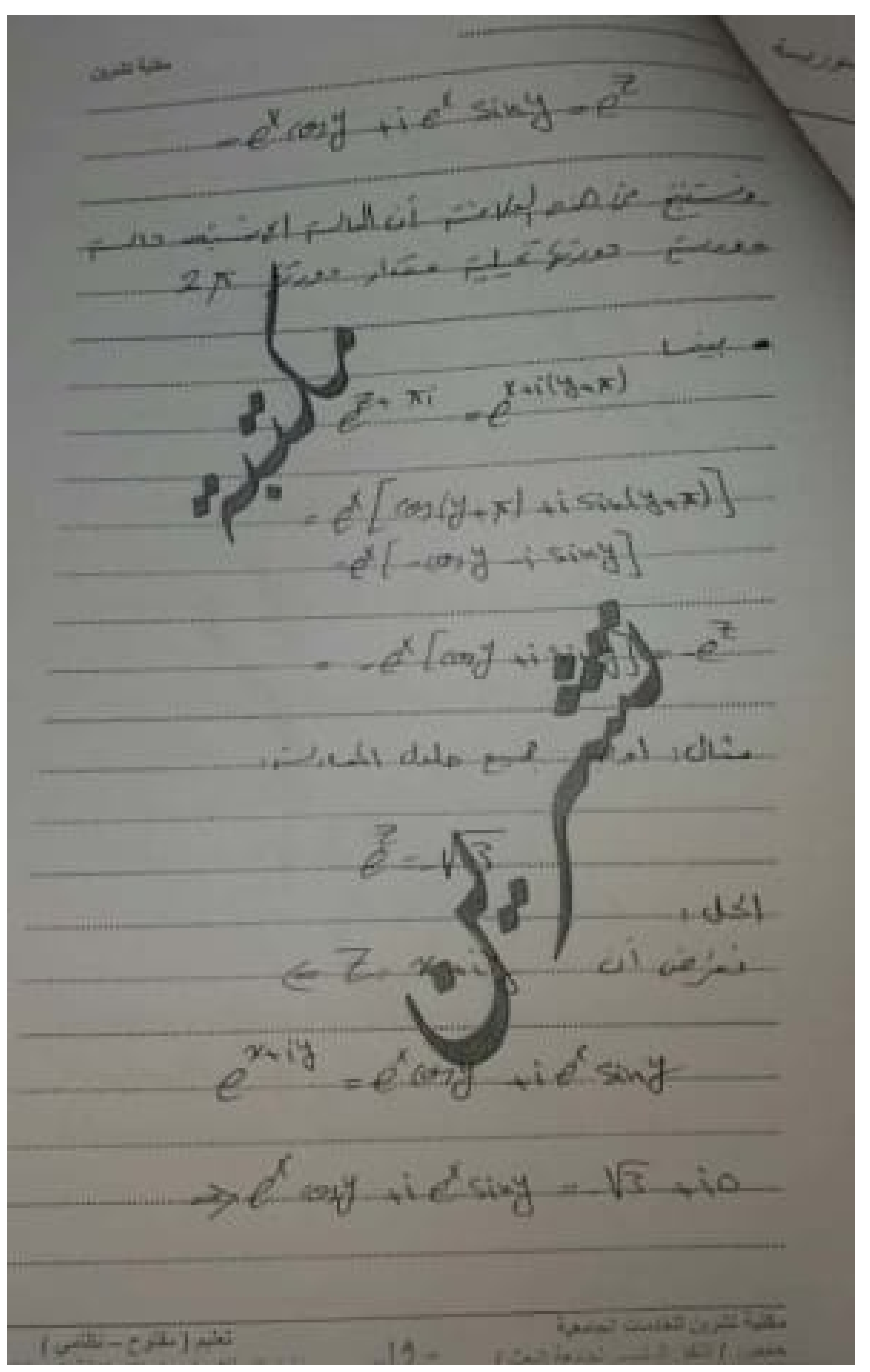
$= \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$

الملاحظة (1) تمثل عدد غير منتهي من النقاط ... النقاط متساوية بالأجزاء الحقيقية وتختلف عن بعضها البعض بالأجزاء التخيلية ...





Scanned by CamScanner



$$= e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

نستنتج من هذه العلاقة أن الدالة الأسية دالة دورية دورتها تخيلية مقدارها 2π

- بين أن

$$e^{z+\pi i} = e^{x+i(y+\pi)}$$

$$= e^x[\cos(y+\pi) + i\sin(y+\pi)]$$

$$= e^x[-\cos y - i\sin y]$$

$$= -e^x[\cos y + i\sin y] = -e^z$$

مثال: أوجد جميع حلول المعادلة

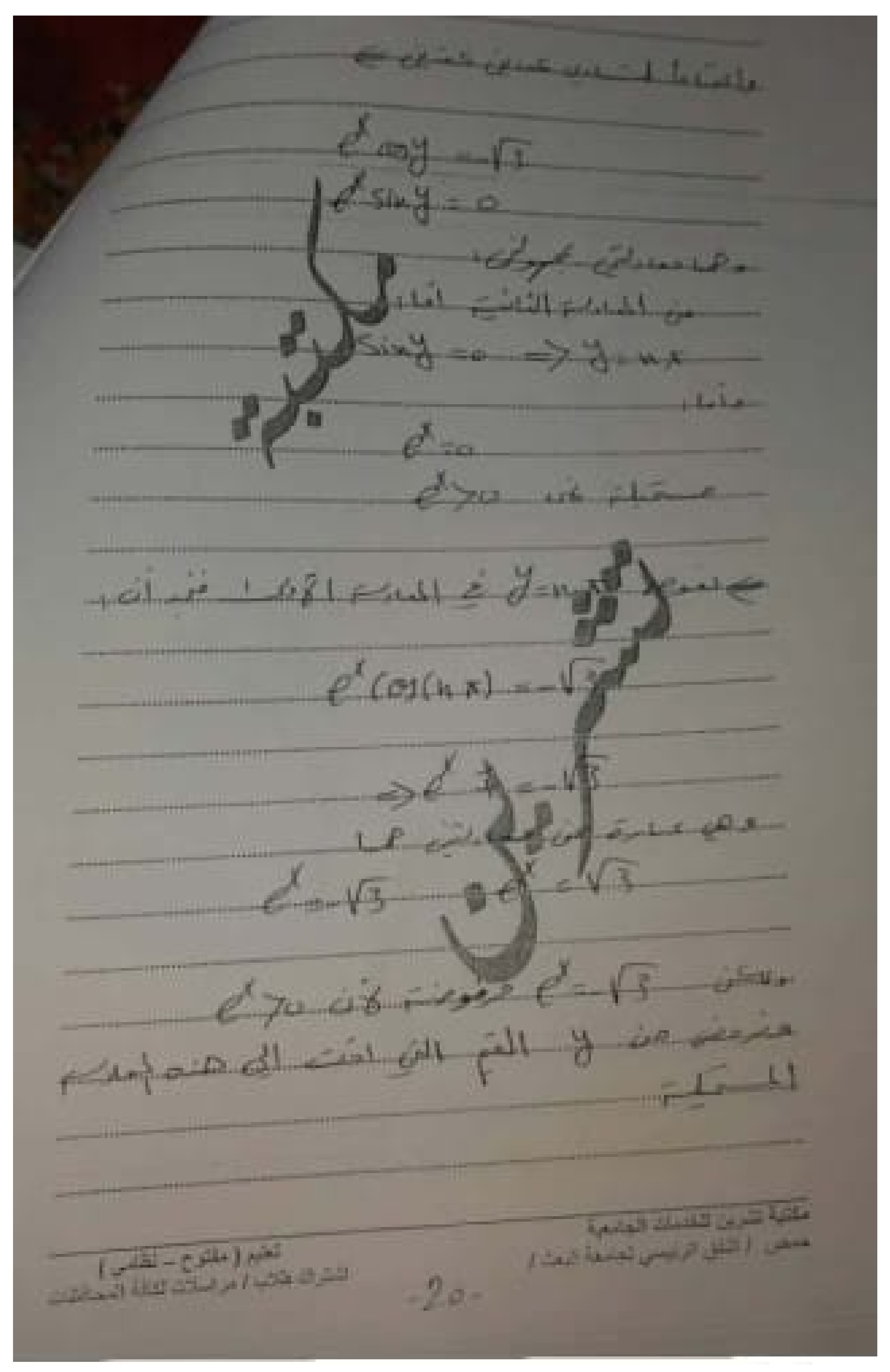
$$e^z = \sqrt{3}$$

الحل:

نفرض أن $z = x + iy \Rightarrow$

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$\Rightarrow e^x \cos y + i e^x \sin y = \sqrt{3} + i0$$



والمعادلات السابقة تكافئ ما يلي:

$e^x \cos y = \sqrt{3}$

$e^x \sin y = 0$

وبحل هاتين المعادلتين:

من المعادلة الثانية فإن

$\sin y = 0 \Rightarrow y = n\pi$

وبما أن

$e^x = 0$

مستحيل لأن $e^x > 0$

نعوض $y = n\pi$ في المعادلة الأولى نجد أن

$e^x \cos(n\pi) = \sqrt{3}$

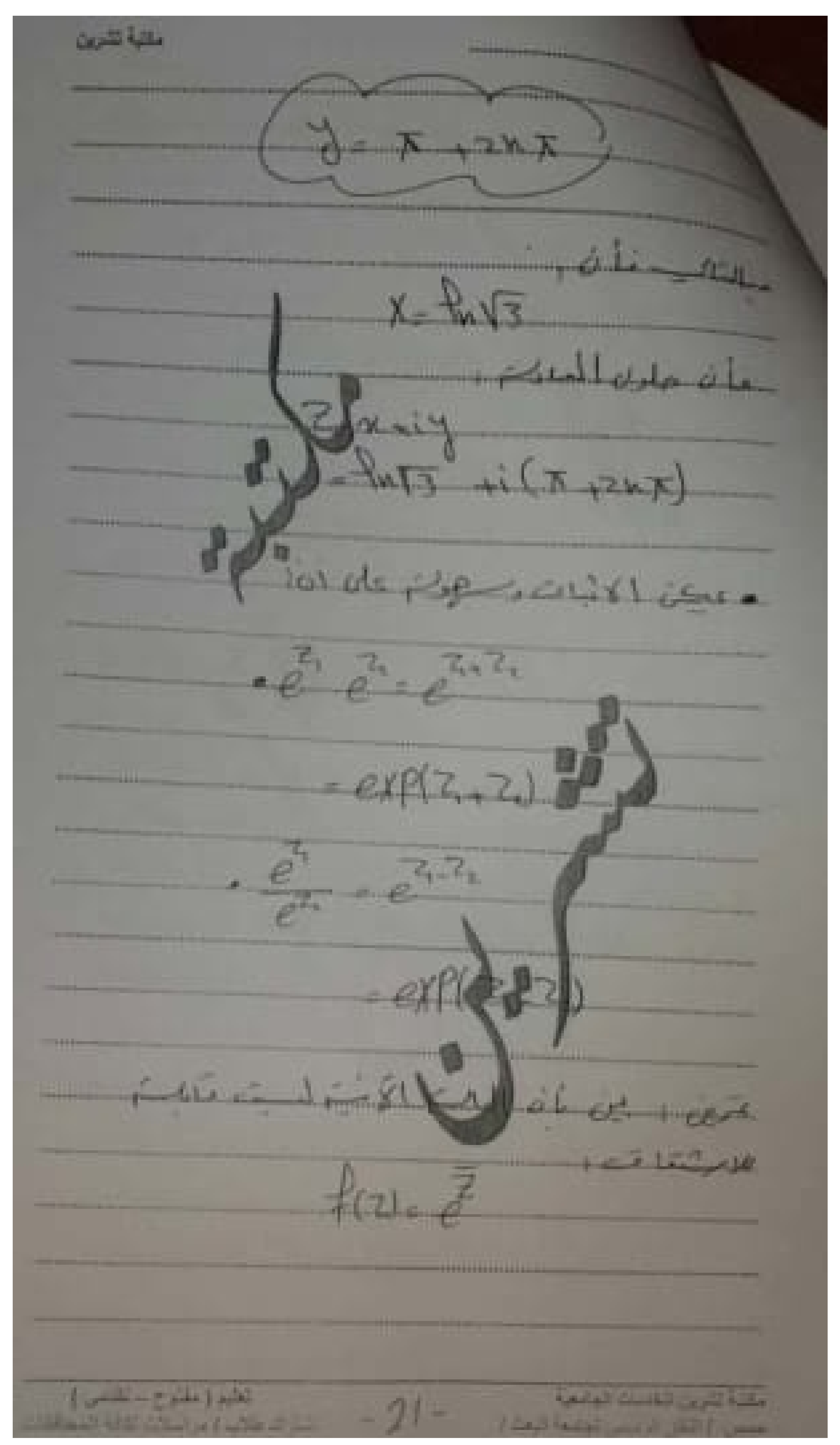
$\Rightarrow e^x (-1)^n = \sqrt{3}$

وهي عندما [illegible]

$e^x = \sqrt{3}$ أو $e^x = -\sqrt{3}$

ولكن $e^x = -\sqrt{3}$ مرفوضة لأن $e^x > 0$

فنعوض عن y القيم التي [illegible] هذه المعادلة [illegible]



$y = \pi + 2k\pi$

ومنه فإن:

$x = \ln\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة:

$z = x + iy$

$= \ln\sqrt{3} + i(\pi + 2k\pi)$

• يمكن الإثبات بسهولة على أن:

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

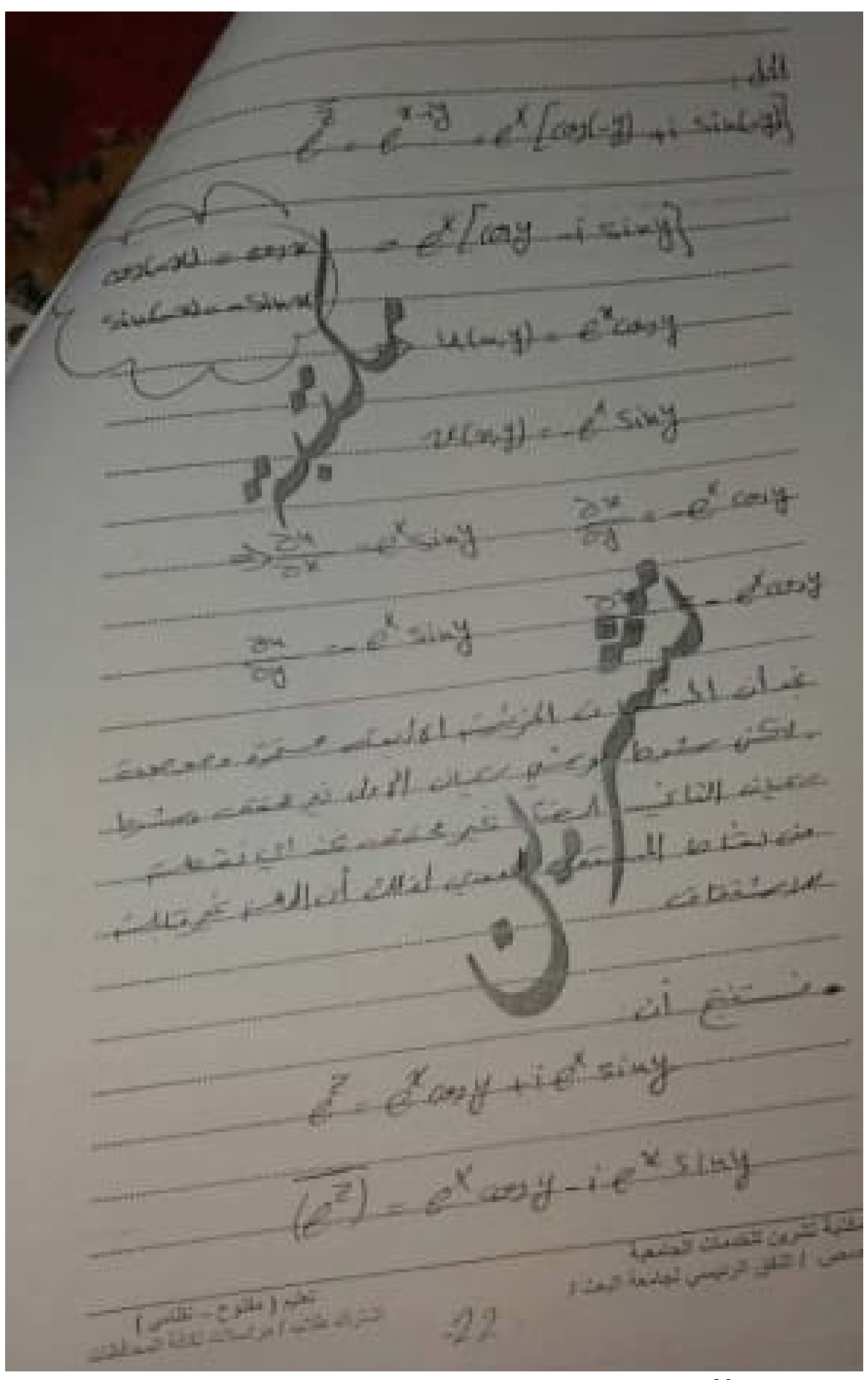
$= \exp(z_1 + z_2)$

$\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

$= \exp(z_1 - z_2)$

تمرين: بين أن الدالة التالية ليست قابلة للاشتقاق:

$f(z) = e^{\bar{z}}$



$$e^{\bar z} = e^{x-iy} = e^x[\cos(-y) + i\sin(-y)]$$

$$= e^x[\cos y - i\sin y]$$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

$$v(x,y) = -e^x \sin y$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ $\qquad$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$

[illegible]

نستنتج أن

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$\overline{(e^z)} = e^x \cos y - i e^x \sin y$$

